LE MATEMATICHE
Vol. LI (1996) – Fasc. II, pp. 375–412

OPERATORI PSEUDODIFFERENZIALI QUASI PERIODICI e loro risolventi di tipo microlocale

ANTONIO AVANTAGGIATI

Dedicato a Francesco Guglielmino

Continuing the work begun in paper [2] we have studied certain algebras of almost periodic Pseudodifferential Operators $q(x, D)$. We have explored the equation

$$q(x, D)u(x) = f(x)$$

and have constructed the resolvent of the operator $u \to q(x, D)u(x)$. The main hypothesis is a kind of sectoriality for $\tilde{q}(D)$, where

$$\tilde{q}(\xi) = \fint q(x, \xi)\, dx.$$

0. Introduzione.

La Teoria degli Operatori Pseudodifferenziali quasi periodici (PDO di tipo a.p.) è stata fondata osservando che ogni $q(x, D)$ che sia di tipo a.p., è in primo luogo un PDO ordinario (cfr. p. e. [8], [13], [14]). Il suo punto di partenza è la rappresentazione di $q(x, D)u(x)$ mediante un Integrale di Fourier in $\mathbb{R}^s$. Le proprietà di tali Operatori vengono stabilite sfruttando procedimenti

Entrato in Redazione il 28 luglio 1997.

di approssimazione da $C^\infty_{ap}(\mathbb{R}^s)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^s)$ e da $C^\infty_0(\mathbb{R}^s)$ in $C^\infty_{ap}(\mathbb{R}^s)$ con tecniche abbastanza laboriose anche se di tipo standard.

Non è il caso di fare riferimento qui all'interesse teorico e applicativo di questo argomento. Ci sono lavori come per esempio [6], [14], [15] e [16] che forniscono un ampio panorama sia dei risultati noti sia dei fatti critici presenti in tale teoria.

In questo lavoro mi propongo di avviare uno studio autonomo dei PDO di tipo a.p., partendo da una loro definizione naturale. Prendo come strumento di partenza la trasformazione di Bohr-Fourier e gli spazi nei quali opero sono particolari sottospazi degli spazi di Sobolev-Besicovitch $H^{m,q}_{ap}(\mathbb{R}^s)$ o di $C^\infty_{ap}(\mathbb{R}^s)$. Si tratta qui, come in precedenti lavori ([2], [5], [9],...), di sottospazi costituiti dalle f quasi periodiche il cui spettro delle frequenze sia contenuto in un sottoinsieme numerabile Ω di $\mathbb{R}^s$: $H^{m,q}_{ap}(\mathbb{R}^s;\Omega)$, $C^\infty_{ap}(\mathbb{R}^s;\Omega)$.

Questa scelta è determinata dai seguenti due motivi.

I) Il risultato di regolarità per i PDO di tipo a.p. negli spazi $H^{m,q}_{ap}(\mathbb{R}^s)$ appare illusorio. Infatti se $q(x,D)$ è ellittico e di ordine r si dimostra (cfr. [12])

$$u \in H^{-\infty,q}_{ap}(\mathbb{R}^s) \quad \text{e} \quad q(x,D)u(x) \in H^{m,q}_{ap}(\mathbb{R}^s) \Longrightarrow u \in H^{m+r,q}_{ap}(\mathbb{R}^s).$$

Per comprendere in quale senso intendiamo *illusorio* questo risultato basta tener presente che in $H^{\infty,q}_{ap}(\mathbb{R}^s)$ esistono infinite classi di sottospazi i cui elementi non appartengono nemmeno a $C^0_{ap}(\mathbb{R}^s)$. Negli spazi $H^{m,q}_{ap}(\mathbb{R}^s)$ non sono vere le Immersioni di tipo Sobolev (cfr. [2], [12]). Nei sottospazi $H^{m,q}_{ap}(\mathbb{R}^s;\Omega)$, se la famiglia $\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)_{\lambda\in\Omega}$ è sommabile con certi esponenti γ le Immersioni di Sobolev sono vere. Queste dipendono *anche* dal numero $\beta = \inf\{\gamma \mid \sum_{\lambda\in\Omega} |\lambda|^{-\gamma} < +\infty\}$, (cfr. n. 1). A parità di m e q tali Immersioni sono tanto meno regolari quanto maggiore è il numero β. Inoltre se $\Omega(=\Lambda_0)$ è un semigruppo con d generatori $\lambda^1_*, \dots, \lambda^d_*$, verificanti una certa condizione di convessità [Ipotesi α), cfr. n. 1] allora $\beta = d$.

II) I sottospazi $C^\infty_{ap}(\mathbb{R}^s;\Lambda_0)$ quando Λ_0 è un semigruppo di $\mathbb{R}^s(+)$ con d generatori e verificante l'ipotesi α), indicati con $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$, sono strutture algebrico-topologiche molto ricche di proprietà (cfr. [2] ed il seguente n. 3). Quella più stimolante possiamo così descriverla: *Ogni u che appartenga ad un tale sottospazio ha la famiglia dei coefficienti di Bohr-Fourier* $(a(\lambda,u) \mid \lambda \in \Lambda_0)$ *infinitesima di ordine comunque elevato per* $|\lambda| \to +\infty$.

Per questa proprietà è stato attribuito a tali sottospazi lo stesso ruolo dello spazio di Schwatz nella Teoria classica delle Distribuzioni. Ciò sarà chiarito nei successivi numeri 1 e 3.

I risultati che esponiamo in questo lavoro sono preliminari e introduttivi ad una Teoria a più ampio respiro ([1]) che ha come obiettivo la struttura degli spazi funzionali costruiti sulla compattificazione di Bohr $\mathbb{R}^s_B$ di $\mathbb{R}^s$ e la ricerca delle soluzioni quasi periodiche delle equazioni funzionali su $\mathbb{R}^s_B$.

Per ora nel n. 3 completiamo lo studio dello spazio $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda)$ iniziato e utilizzato nel precedente lavoro [2]. Nel n. 4 introduciamo la classe di Operatori pseudo differenziali di cui ci occupiamo. Si tratta di una classe molto più ristretta di quella studiata da M.A. Shubin in [12]. Ai simboli $q(x, \xi)$ dei nostri PDO di tipo a.p., $q(x, D)$ imponiamo di appartenere come funzioni di x ad uno spazio $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ con Λ_0 *indipendente* da ξ.

Rientrano nella nostra classe tuttavia gli operatori differenziali ordinari

$$q(x, D) = \sum_{|\gamma|\le r} q_\gamma(x) D^\gamma$$

nella ipotesi che esista un semigruppo Λ_0 di $\mathbb{R}^s(+)$, verificante l'Ipotesi α) e tale che $q_\gamma \in \mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ per tutti i γ coinvolti. Per questa classe di PDO dimostriamo teoremi di continuità, di rappresentazione e di composizione in relazione ai simboli, mettendo in evidenza un formalismo ben più semplice di quello che interviene nella teoria generale.

Nel n. 5 infine dimostriamo un teorema di rappresentazione dell'Operatore Risolvente di un generico $q(x, D)$ relativamente a sottospazi $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ coinvolgendo in modo rilevante l'operatore $\tilde{q}(D)$ avente per simbolo

$$\tilde{q}(\xi) = ⨍ q(x, \xi)\, dx.$$

Si ammette che $\tilde{q}$ sia di *tipo settoriale* sul cono $\mathcal{H}$ che proietta l'inviluppo convesso di $\{\lambda^1_*, \dots, \lambda^d_*\}$, ciò vuol dire che c'è un angolo proprio Γ del piano complesso $\mathbb{C}$ ed un $\delta > 0$ tale che qualunque sia $\xi \in \mathcal{H}$ si ha

$$|\xi| > \delta \Longrightarrow \tilde{q}(\xi) \in \Gamma.$$

Queste condizioni sono verificate, per esempio, se $\tilde{q}$ è $\mathcal{H}$-ipoellittico, ossia, per $q \in APS^m(\Lambda_0)$,

$$\exists c \in]0, 1], \quad \exists \delta, C \in \mathbb{R}_+ \quad \text{tali che} \quad \forall \xi \in \mathcal{H}$$
$$|\xi| > \delta \Longrightarrow Re\tilde{q}(\xi) \ge C|\xi|^{mc}.$$

([1]) Il successivo lavoro è quello annunciato in [3].

Il risultato del Teorema 5.2 si applica perciò agli operatori $q(x, D)$ che sono $\mathcal{H}$-ipoellittici per ogni $\Lambda_0 \subset \mathcal{H}$. Fatto questo che consente di dimostrare che per le equazioni

$$(z - q(x, D))u(x) = f(x)$$

relativamente agli spazi $H_{ap}^{m;q}(\mathbb{R}^s; \Lambda_0)$ vale il Teorema dell'alternativa ([2]).

1. Notazioni e richiami.

Fissiamo $\lambda_*^1, \lambda_*^2, \ldots, \lambda_*^d$ punti di $\mathbb{R}^s$, poniamo

$$\lambda(\ell) = \ell_1\lambda_*^1 + \ldots + \ell_d\lambda_*^d \quad \text{con} \quad \ell = (\ell_1, \ldots, \ell_d)$$

e introduciamo

$$\Lambda = \left\{\lambda(\ell) \in \mathbb{R}^s \mid \ell \in \mathbb{N}_0^d \setminus \{\mathbf{0}\}\right\} \quad \text{e} \quad \Lambda_0 = \Lambda \cup \{\mathbf{0}\}\,. \tag{1.1}$$

Λ, come sottoinsieme di $\mathbb{R}^s$ è chiuso rispetto alla somma, è cioè un semigruppo di $\mathbb{R}^s(+)$ ed è finitamente generato.

Ha un ruolo fondamentale la seguente

Ipotesi α).

i) $\lambda_*^1, \ldots, \lambda_*^d$ sono $\mathbb{Z}$-linearmente indipendenti
ii) $\overline{conv}\{\lambda_*^1, \ldots, \lambda_*^d\} \cap \{\mathbf{0}\} = \emptyset$.

Osservazione. Introducendo

$$-\Lambda = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^s \mid -\lambda \in \Lambda\right\},$$

anche $-\Lambda$ è un semigruppo di $\mathbb{R}^s(+)$ ed ha per generatori $-\lambda_*^1, -\lambda_*^2, \ldots, -\lambda_*^d$. Per $-\Lambda$ è vera l'Ipotesi α) se e solo se lo è per Λ.

Nei lavori [2] e [9] viene messo in risalto che da i) e ii) si deduce

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{1}{|\lambda|^\gamma} \begin{cases} < +\infty & \text{se } \gamma > d \\ = +\infty & \text{se } \gamma \leq d \end{cases} \tag{1.2}$$

([2]) L'esposizione dettagliata dei risultati di questo tipo sarà fatta in un lavoro successivo.

Questa condizione garantisce che per i sottospazi di Sobolev-Besicovitch

$$H_{ap}^{m,q}(\mathbb{R}^s;\Lambda_0) = \left\{u \in H_{ap}^{m,q}(\mathbb{R}^s) \mid \sigma(u) \subset \Lambda_0\right\} \tag{1.3}$$

valgono i teoremi di Sobolev (cfr. [2], [5], [9], ...).

Richiameremo esplicitamente soltanto quello che qui interessa più da vicino.

Se $mq > d$ e $(m-1)q \leq d$ allora

$$H_{ap}^{m,q}(\mathbb{R}^s;\Lambda_0) \hookrightarrow C_{ap}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^s,\Lambda_0) \quad \forall\alpha \in \left[0, m - \frac{d}{q}\right[. \tag{1.4}$$

Per comodità del Lettore ricordiamo:
$H_{ap}^{m,q}(\mathbb{R}^s)$ è il sottospazio di $B_{ap}^1(\mathbb{R}^s) = L^1(\mathbb{R}_B^s, d\mu)$ delle u che hanno finita la norma $\|\cdot\|_{m,q}$ data da

$$\|u\|_{m,q}^{q'} = \sum_{\lambda\in\sigma(u)} |a(\lambda,u)|^{q'}(1+|\lambda|^2)^{mq'/2}; \tag{1.5}$$

$\mathbb{R}_B^s$ è la compattificazione di Bohr del gruppo localmente compatto $\mathbb{R}^s(+)$;
$d\mu$ è la misura di Haar su $\mathbb{R}_B^s$;
$a(\lambda,u)$ è la trasformata di Bohr-Fourier di $u \in B_{ap}^1(\mathbb{R}^s)$,

$$\begin{aligned} a(\lambda,u) &= ⨍ u(x)e^{-i\lambda\cdot x}\,dx \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{(2T)^s}\int_{[-T,T]^s} u(x)e^{-i\lambda\cdot x}\,dx; \end{aligned}$$

$\sigma(u)$ è il supporto di $a(\lambda,u)$, denominato anche *spettro delle frequenze* della funzione u (cfr. [10]).

È opportuno riconoscere che con le nostre notazioni risulta in ogni caso,

$$H_{ap}^{m,\infty}(\mathbb{R}^s) \hookrightarrow C_{ap}^m(\mathbb{R}^s).$$

Ammetteremo inoltre

iii) È sempre $d \geq s$ e fra i d vettori $\lambda_*^1, \dots, \lambda_*^d$ i primi s, $\lambda_*^1, \dots, \lambda_*^s$ sono linearmente indipendenti.

Questa situazione verrà messa in evidenza dicendo che *l'intero "d" rappresenta la* Dimesione diofantea *di* Λ_0 *mentre l'intero "s" è la dimensione geometrica di* Λ_0.

L'Immersione espressa dalla (1.4) mette in risalto la rilevante proprietà:

La dimensione diofantea di Λ_0 *ha nei Teoremi di immersione per i sottospazi* $H_{ap}^{m,q}(\mathbb{R}^s;\Lambda_0)$ *lo stesso ruolo della dimensione dello spazio euclideo sui cui aperti sono costruiti gli ordinari spazi di Sobolev.*

Enunciamo infine esplicitamente per un sottoinsieme numerabile Ω di $\mathbb{R}^s$ la

Condizione β).

$$\sum_{\lambda\in\Omega}\frac{1}{|\lambda|^{\gamma}}\begin{cases} < +\infty & \forall\,\gamma > \beta \\ = +\infty & \forall\,\gamma < \beta. \end{cases}$$

Considerato ora un Λ_0 fissato, e ammesse le ipotesi i), ii) e iii), in [2] abbiamo introdotto il sottospazio

$$\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0) = \{u \in C^{\infty}_{ap}(\mathbb{R}^s) \mid \sigma(u) \subset \Lambda_0\},$$

al quale abbiamo attribuito il ruolo dello spazio delle funzioni a decrescenza rapida $\mathcal{S}(\mathbb{R}^s)$ nella Teoria classica delle Distribuzioni. Nel precedente lavoro [2] abbiamo dimostrato, per ogni $u \in \mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$

$$D^{\gamma}u(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda_0} a(\lambda, u)\lambda^{\gamma}e^{i\lambda\cdot x} \quad \forall\,\gamma \in \mathbb{N}_0^s$$

uniformemente in $\mathbb{R}^s$. Questo risultato è strettamente legato alla (1.2).

Poiché risulta

$$\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0) = \bigcap_{m=1}^{\infty} C^{m}_{ap}(\mathbb{R}^s;\,\Lambda_0)$$

è naturale introdurre in tale spazio la topologia di *spazio numerabilmente normato*. Seguendo lo schema adattato da Gel'fand e Shilov in [7] si pone

$$u_n \overset{\mathcal{S}_{ap}}{\to} u \iff \forall m \in \mathbb{N}_0 \quad u_n \overset{C^m}{\to} u.$$

Tale convergenza, per mezzo della (1.4) risulta equivalente a quella così definita

$$u_n \overset{\mathcal{S}_{ap}}{\to} u \iff \forall m \in \mathbb{N}_0 : \quad u_n \overset{H^{m,2}}{\to} u.$$

Ricordiamo inoltre che la sommabilità delle famiglie $(c_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_0}$ è definita mediante l'*insieme diretto* $\mathcal{F}(\Lambda)$ delle parti finite di Λ_0, ordinato per inclusione. Si deduce da ciò che la famiglia $P_I(x))_{I\in\mathcal{F}(\Lambda_0)}$ con

$$P_I(x) = \sum_{\lambda\in I} c_\lambda e^{i\lambda\cdot x} \qquad I \in \mathcal{F}(\Lambda_0)$$

è densa in $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$. Poiché $\mathcal{F}(\Lambda)$ è numerabile lo spazio $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ è separabile.

Abbiamo quindi introdotto

$\mathcal{S}'_{ap}(\Lambda_0)$: Spazio dei funzionali sesquilineari e continui su $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ e abbiamo dimostrato

$$\mathcal{S}'_{ap}(\Lambda_0) = H^{\infty,2}_{ap}(\mathbb{R}^s; \Lambda_0) = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} H^{m,2}_{ap}(\mathbb{R}^s; \Lambda_0).$$

Per ogni $T \in \mathcal{S}'_{ap}(\Lambda_0)$ e per ogni $u \in \mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$

$$\begin{aligned} \langle T \mid u\rangle &:= T(u) \\ \langle D^\gamma T \mid u\rangle &:= \langle T \mid D^\gamma u\rangle \qquad \forall \gamma \in \mathbb{N}_0^s, \end{aligned}$$

essendo $D = (D_1, \dots, D_s)$, $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$, $D^\gamma = D_1^{\gamma_1} \dots D_s^{\gamma_s}$, ...

$\mathcal{S}'_{ap}(\Lambda_0)$ è stato denominato *Spazio delle Distribuzioni* quasi periodiche a *crescenza lenta* con spettro (delle frequenze) in Λ_0.

La topologia in $\mathcal{S}'_{ap}(\Lambda_0)$ è stata definita con

$$T_n \overset{\mathcal{S}'_{ap}}{\to} T \iff \exists r \in \mathbb{N}_0 \text{ t.c. } T_n, T \in H^{-r,2}_{ap} \quad \text{e} \quad T_n \to T \quad \text{in} \quad H^{-r,2}_{ap}.$$

In [2] abbiamo stabilito che per ogni $T \in \mathcal{S}'_{ap}(\Lambda_0)$ esistono $f \in B^2_{ap}(\mathbb{R}^s; \Lambda_0)$ ed $r \in \mathbb{N}$ tali che

$$T = (1 - \Delta)^r f.$$

Inoltre abbiamo provato la seguente formula di rappresentazione

$$\langle T \mid u\rangle = \sum_{\lambda\in\Lambda_0} a(\lambda, T)\overline{a(\lambda, u)} \quad \forall u \in \mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0).$$

2. Lemmi preliminari.

Fissiamo un semigruppo Λ di $\mathbb{R}^s(+)$ verificante le condizioni i), ii) e iii) del precedente paragrafo e poniamo

$$\Lambda_0 = \Lambda \cup \{\mathbf{0}\}. \tag{2.1}$$

Introduciamo in Λ_0 una relazione di ordine parziale mediante gli elementi di $\mathbb{N}_0^d$. Se

$$\lambda = \ell_1\lambda_*^1 + \dots + \ell_d\lambda_*^d \quad \text{e} \quad \mu = m_1\lambda_*^1 + \dots + m_d\lambda_*^d$$

poniamo

$$\lambda \preceq \mu :\Longleftrightarrow \ell_j \leq m; \qquad \text{per } j = 1, 2, \dots, d. \tag{2.2}$$

Poiché indicheremo sempre con lettere greche gli elementi di Λ, non potranno sorgere equivoci se useremo

$$\lambda \leq \mu \quad \text{al posto di} \quad \lambda \preceq \mu.$$

Porremo talvolta: $\mu \geq \lambda$ al posto di $\lambda \leq \mu$ e "$\lambda < \mu$" se "$\lambda \leq \mu$ ed esiste k t.c. $\ell_k < m_k$".

Utilizzeremo sistematicamente i sottoinsiemi

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \{\mu \in \Lambda_0 \mid \mu \leq \lambda\} \\ I'(\lambda) &= \{\mu \in \Lambda_0 \mid \lambda \leq \mu\} \\ I(\lambda, \nu) &= \{\mu \in \Lambda_0 \mid \lambda \leq \mu \leq \nu\} \qquad \forall \lambda, \nu \in \Lambda_0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

$I(\lambda, \nu)$ è *non vuoto* se e solo se $\lambda \leq \nu$, e

$$|I(\lambda)| := \operatorname{card} I(\lambda) = (\ell_1 + 1)(\ell_2 + 1) \cdots (\ell_d + 1) \tag{2.4}$$

e comunque si fissino λ e μ in Λ_0,

$$\exists \mu - \lambda \in \Lambda_0 \Longleftrightarrow \lambda \leq \mu. \tag{2.5}$$

La relazione $\leq$ definita su Λ_0 rende questo filtrante. Per le funzioni $f(\lambda)$ a valori reali o complessi definiti su Λ_0 si ha

$$\lim_{\Lambda_0(\leq)} f(\lambda) = \ell \Longleftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \lambda_\varepsilon \in \Lambda_0 \text{ t.c. } \lambda_\varepsilon \leq \lambda \Longrightarrow |f(\lambda) - \ell| < \varepsilon. \tag{2.6}$$

È facile verificare

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} f(\lambda) = \ell \Longrightarrow \lim_{\Lambda(\leq)} f(\lambda) = \ell, \tag{2.6$'$}$$

ma l'implicazione opposta in generale non è vera. Ciò è essenzialmente dovuto al fatto che l'insieme degli elementi di Λ_0 che *non* seguono un fissato elemento λ_* è infinito.

Come esempio è utile osservare

$$\lim_{\Lambda_0(\leq)} \frac{|I(\lambda_*, \lambda)|}{|I(\lambda)|} = 1. \tag{2.7}$$

In relazione a ciò parleremo di somma di una famiglia $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ con due significati. Il primo è quello che abbiamo adoperato in [2] e riguarda il limite delle somme relative all'insieme $\mathcal{F}(\Lambda)$ delle parti finite di Λ e che scriveremo

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_0} a_\lambda = A :\Longleftrightarrow \lim_{I\in\mathcal{F}(\Lambda)} \sum_{\lambda\in I} a_\lambda = A. \tag{2.8}$$

Per questo si dimostra

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_0} a_\lambda = A \Longrightarrow \lim_{|\nu|\to\infty} \sum_{\lambda\in I(\nu)} a_\lambda = A. \tag{2.8'}$$

Basta infatti osservare che $I(\nu)$ è finito e che per ogni sottoinsieme finito I di Λ_0 esiste $\nu\in\Lambda_0$ tale che $I\subset I(\nu)$.

Ma possiamo dare il seguente altro significato

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_0}{}^{*} a_\lambda = A \Longleftrightarrow \lim_{\Lambda(\leq)} \sum_{\lambda\in J(\nu)} a_\lambda = A \tag{2.9}$$

che è più generale del (2.8). Abbiamo infatti

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_0} a_\lambda = A \Longrightarrow \sum_{\lambda\in\Lambda_0}{}^{*} a_\lambda = A\,. \tag{2.9'}$$

Per $\Lambda_0 = \mathbb{N}_0^2$, $n=(n_1,n_2)\in\mathbb{N}_0^2$ abbiamo, per esempio,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0^2}{}^{*} \frac{(-1)^{n_1+n_2}}{(n_1+1)(n_2+1)} = (\log 2)^2,$$

mentre non ha significato la somma nel senso della (2.8).

Occupiamoci ora di alcuni risultati del tipo dei teoremi di Cesaro.

Lemma 2.1. *Supponiamo* $\sum_{\lambda\in\Lambda_0}{}^{*} a_\lambda = A$*, poniamo*

$$A(\nu) = \sum_{\lambda\in I(\nu)} a_\lambda \qquad \forall\ \nu\in\Lambda_0$$

ed ammettiamo che $(A(\nu))_{\nu\in\Lambda_0}$ *sia limitata, allora*

$$\lim_{\Lambda_0(\leq)} \frac{1}{|I(\nu)|} \sum_{\lambda\in I(\nu)} A(\lambda) = A. \tag{2.10}$$

Dimostrazione. Intanto si ricava facilmente: $\forall\, \nu \in \Lambda_0$

$$\left| \frac{1}{|I(\nu)|} \sum_{\lambda \in I(\nu)} A(\lambda) - A \right| \le \frac{1}{|I(\nu)|} \sum_{\lambda \in I(\nu)} |A(\lambda) - A|. \tag{2.11}$$

Fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ introduciamo $\lambda_\varepsilon \in \Lambda_0$ in modo che si abbia

$$\lambda_\varepsilon \le \lambda \Longrightarrow |A(\lambda) - A| < \varepsilon.$$

Prendendo $\nu \ge \lambda_\varepsilon$, il secondo membro della (2.11) può essere maggiorato con $\sigma_1 + \sigma_2$ essendo

$$\sigma_1 = \frac{1}{|I(\nu)|} \sum_{\lambda \in I(\lambda_\varepsilon, \nu)} |A(\nu) - A|$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{|I(\nu)|} \sum_{\lambda \in I(\nu) \setminus I(\Lambda_\varepsilon, \nu)} |A(\nu) - A|.$$

È evidente che $\sigma_1 \le \varepsilon$.
Per σ_2, introducendo un maggiorante M per $(|A(\lambda)|)_{\lambda \in \Lambda_0}$, si ricava

$$\sigma_2 \le 2M \frac{|I(\nu)| - |I(\lambda_\varepsilon, \nu)|}{|I(\nu)|}.$$

In virtù della (2.7) si deduce facilmente la nostra tesi. $\square$

Osserviamo che la (2.10) è ancora vera nella sola ipotesi: $\sum_{\lambda \in \Lambda_0} a_\lambda = A$.

Lemma 2.2. *Ammettiamo:* $A, B \in \mathbb{C}$ *e*

$$\lim_{\Lambda(\le)} A(\lambda) = A \quad e \quad \lim_{\Lambda(\le)} B(\lambda) = B,$$

e che $(A(\lambda))_{\lambda \in \Lambda_0}$ *e* $(B(\lambda))_{\lambda \in \Lambda_0}$ *siano limitate, allora*

$$\lim_{\Lambda(\le)} \frac{1}{|I(\nu)|} \sum_{\lambda \in I(\nu)} A(\lambda) B(\nu - \lambda) = AB\,. \tag{2.12}$$

Dimostrazione. Introduciamo M' ed M'' in modo che

$$|A(\lambda)| \leq M' \quad \text{e} \quad |B(\lambda)| \leq M'' \qquad \forall \lambda \in \Lambda_0;$$

con facili trasformazioni si ha

$$\frac{1}{|I(\nu)|} \sum_{\lambda \in I(\nu)} A(\lambda) B(\nu - \lambda) - AB =$$

$$= \frac{1}{|I(\nu)|} \sum_{\lambda \in I(\nu)} A(\lambda)[B(\nu - \lambda) - B] + \frac{B}{|I(\nu)|} \sum_{\lambda \in I(\nu)} [A(\lambda) - A].$$

Come conseguenza

$$\left| \frac{1}{|I(\nu)|} \sum_{\lambda \in I(\nu)} A(\lambda) B(\nu - \lambda) - AB \right| \leq$$

$$\leq \frac{M'}{|I(\nu)|} \sum_{\lambda \in I(\nu)} |B(\lambda) - B| + \frac{M''}{|I(\nu)|} \sum_{\lambda \in I(\nu)} |A(\lambda) - A|.$$

La (2.12) si ottiene applicando il Lemma 2.1. $\square$

Osserviamo che

$$\text{“} \lim_{|\lambda| \to \infty} A(\lambda) = A \in \mathbb{C} \text{”}$$

implica: “$(A(\lambda))_{\lambda \in \Lambda_0}$ è limitata e

$$\lim_{\Lambda(\leq)} A(\lambda) = A \text{”}.$$

Perciò la seguente variante può essere apportata al Lemma 2.2

$$\text{“} \lim_{|\lambda| \to \infty} A(\lambda) = A \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \lim_{\Lambda(\leq)} B(\lambda) = B \quad \text{e} \quad (B(\lambda))_{\lambda \in \Lambda_0} \quad \text{limitata”}$$

$$\Longrightarrow \text{“} \lim_{\Lambda(\leq)} \frac{1}{|I(\nu)|} \sum_{\lambda \in I(\nu)} A(\lambda) B(\nu - \lambda) = AB \text{”}.$$

Conviene anche osservare

$$\text{“La famiglia} \quad \left(\sum_{\lambda \in I(\nu)} a_\lambda \right)_{\nu \in \Lambda_0} \quad \text{è limitata”}$$

non implica

$$\text{“La famiglia} \quad \left(\sum_{\lambda \in I} a_\lambda \right)_{I \in \mathcal{F}(\Lambda_0)} \quad \text{è limitata”.}$$

Quest'ultima infatti equivale alla sommabilità della famiglia $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_0}$ (cfr. [11]).

Lemma 2.3. *Ammettiamo che*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = A \quad e \quad \sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda = B \tag{2.13}$$

con $A, B \in \mathbb{C}$, *e poniamo*

$$c_\nu = \sum_{\lambda\in I(\nu)} a_\lambda b_{\nu-\lambda} = \sum_{\lambda\in I(\nu)} a_{\nu-\lambda} b_\lambda. \tag{2.14}$$

Si ricava allora

$$\sum_{\mu\in\Lambda_0} c_\mu = AB. \tag{2.15}$$

Dimostrazione. Poniamo, per ogni $\nu \in \Lambda_0$,

$$A(\nu) = \sum_{\lambda\in I(\nu)} a_\lambda; \quad B(\nu) = \sum_{\lambda\in I(\nu)} b_\lambda; \quad C(\nu) = \sum_{\lambda\in I(\nu)} c_\lambda.$$

È facile stabilire, qualunque sia $\nu \in \Lambda_0$

$$\begin{aligned} C(\nu) &= \sum_{\mu\in I(\nu)} c_\mu = \sum_{\mu\in I(\nu)} \sum_{\lambda\in I(\mu)} a_\lambda b_{\mu-\lambda} = \\ &= \sum_{\lambda\in I(\nu)} \sum_{\mu\in I(\lambda,\nu)} a_\lambda b_{\mu-\lambda}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Basta, per giustificare l'ultimo passaggio, osservare quanto segue

$$\begin{aligned} &\{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Lambda \mid \mu\in I(\nu) \quad \text{e} \quad \lambda\in I(\mu)\} = \\ &= \{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Lambda \mid \mu\le\nu \quad \text{e} \quad \lambda\le\mu\} = \\ &= \{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Lambda \mid \lambda\le\nu \quad \text{e} \quad \lambda\le\mu\le\nu\}. \end{aligned}$$

Per la (2.16)

$$\begin{aligned} C(\nu) &= \sum_{\lambda\in I(\nu)} a_\lambda \sum_{\mu\in I(\lambda,\nu)} b_{\mu-\lambda} = \sum_{\lambda\in I(\nu)} a_\lambda B(\nu-\lambda) = \\ &= \sum_{\lambda\in I(\nu)} B(\lambda) a_{\nu-\lambda}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Introduciamo M' ed M'' in modo che

$$\sum_{\lambda\in I(\nu)} |a_\lambda| \le M' \quad \text{e} \quad \sum_{\lambda\in I(\nu)} |b_\lambda| \le M'' \quad \forall\, \nu \in \Lambda_0.$$

Ragionando come per la (2.17) si deduce

$$\sum_{\lambda\in I(\nu)} |c| \le \sum_{\lambda\in I(\nu)} M''|a_{\nu-\lambda}| \le M'M'' \quad \forall\, \nu \in \Lambda_0,$$

che implica la sommabilità della famiglia $(c_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. D'altra parte, con lo stesso procedimento adoperato per stabilire la (2.17) si ricava, per ogni $\omega \in \Lambda_0$

$$\sum_{\nu\in I(\omega)} C(\nu) = \sum_{\nu\in I(\omega)} \sum_{\lambda\in I(\nu)} B(\lambda)a_{\nu-\lambda} = \sum_{\lambda\in I(\omega)} B(\lambda)A(\omega-\lambda). \tag{2.18}$$

Applicando i Lemmi 2.1 e 2.2, concludiamo

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_0} c_\lambda = \lim_{\Lambda(\le)} \frac{1}{|I(\omega)|} \sum_{\nu\in I(\omega)} C(\nu) =$$

$$= \lim_{\lambda(\le)} \frac{1}{|I(\omega)|} \sum_{\lambda\in I(\omega)} B(\lambda)A(\omega-\lambda) = AB. \qquad \square$$

Ci proponiamo ora di stabilire una formula che esprime la trasformata di Bohr-Fourier del prodotto di due funzioni che appartengano ad uno stesso sottospazio relativo ad un semigruppo Λ. Benché verrà adoperata esclusivamente negli spazi $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ la dimostreremo in un contesto più generale.

Lemma 2.4. *Siano $u, v \in B^2_{ap}(\mathbb{R}^s; \Lambda)$ con Λ verificante l'ipotesi α), allora per ogni $\lambda \in \Lambda_0$*

$$a(\lambda, uv) = \sum_{\mu\in I(\lambda)} a(\mu, v)a(\lambda-\mu, u). \tag{2.19}$$

Dimostrazione. Consideriamo un qualunque polinomio

$$P_I(x) = \sum_{\mu\in I} a(\mu, v)\, e^{i\mu\cdot x}$$

Fissiamo I finito con la condizione $I \supset I(\lambda)$. Avremo

$$a(\lambda, uP_I) = \fint u(x)P_I(x)\, e^{-i\lambda\cdot x}\, dx =$$
$$= \sum_{\mu\in I} a(\mu, v) \fint u(x)\, e^{-i(\lambda-\mu)\cdot x}\, dx.$$

Poiché per $\mu \notin I(\lambda)$ si ha $\lambda - \mu \notin \Lambda_0$ e conseguentemente $a(\lambda - \mu, u) = 0$, concludiamo

$$a(\lambda, uP_I) = \sum_{\mu\in I(\lambda)} a(\mu, v)a(\lambda - \mu, u). \tag{2.20}$$

Poiché $P_I \longrightarrow v$ in B^2_{ap} su $\mathcal{F}(\Lambda)$, da $u \in B^2_{ap}$ si deduce ovviamente $uP_I \longrightarrow uv$ in B^1_{ap}. Dalla (2.20) segue quindi la (2.19).

Lo stesso procedimento può essere adoperato per una espressione differenziale del tipo

$$q(x, D)u(x) = \sum_{|\alpha|\le r} q_\alpha(x)D^\alpha u(x). \qquad \square \tag{2.21}$$

Lemma 2.5. *Sia $q(x, D)$ un operatore differenziale avente i coefficienti $q_\alpha(x)$ appartenenti ad un sottospazio del tipo $B^2_{ap}(\mathbb{R}^s; \Lambda_0)$ su un semigruppo regolare Λ_0 di $\mathbb{R}^s(+)$. Per ogni $u \in \mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ si ha*

$$a[\lambda, q(\cdot, D)u] = \sum_{\mu\in I(\lambda)} a(\mu, u)a[\lambda - \mu, q(\cdot, \mu)]. \tag{2.22}$$

Dimostrazione. Intanto osserviamo

$$a\big[\lambda, q(\cdot, D)u\big] = \fint \sum_{|\alpha|\le r} q_\alpha(x)\big(D^\alpha u(x)\big)e^{-i\lambda\cdot x}\, dx.$$

Fissato $\lambda \in \Lambda$ consideriamo

$$P_I(x) = \sum_{\mu\in I} a(\mu, u)e^{i\mu\cdot x}$$

essendo I un qualunque sottoinsieme finito di Λ_0 con la sola condizione $I \supset I(\lambda)$. Sappiamo che $D^\alpha P_I(x)$ converge uniformemente a $D^\alpha u(x)$ relativamente a $\mathcal{F}(\Lambda)$. Deduciamo

$$a\big[\lambda, q(\cdot, D)P_I\big] = \sum_{|\alpha|\le r} \sum_{\mu \in I} a(\mu, u) \fint q_\alpha(x)\mu^\alpha e^{-i(\lambda-\mu)\cdot x}\, dx =$$

$$= \sum_{\mu\in I} a(\mu, u) a\big[\lambda - \mu, q(\cdot, \mu)\big].$$

La (2.22) segue da questa, con un ovvio passaggio a limite, osservando anche ora

$$\text{“}\mu \notin I(\lambda)\text{”} \Longrightarrow \text{“}a\big[\lambda - \mu, q(\cdot, \mu)\big] = 0\text{”}.$$

3. Ulteriori proprietà legate alla trasformazione di Bohr-Fourier.

In questo paragrafo completiamo la costruzione della struttura $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ quando Λ_0 è un semigruppo di $\mathbb{R}^s$ verificante l'ipotesi α); in tal caso diremo talvolta che "Λ_0 *è un semigruppo regolare*".

Alcuni risultati valgono nella situazione più generale in cui a Λ_0 si sostituisca un sottoinsieme numerabile Ω di $\mathbb{R}^s$ verificante la *Condizione* β).

La estensione dei risultati a queste situazioni è utile almeno nei seguenti due casi per Ω

(3.1) $$\Omega = \Lambda_0 \cup (-\Lambda_0)$$

con $-\Lambda_0 = \{\mu \in \mathbb{R}^s \mid -\mu \in \Lambda_0\}$.

(3.2) $$\Omega = \bigcup_{j=1}^n \Lambda_0^j$$

ove ogni Λ_0^j è un semigruppo verificante l'ipotesi α).

Osservazione 1. Se Λ_0 verifica l'ipotesi α) anche $-\Lambda_0$ la verifica.

Osservazione 2. Se Ω è dato dalla (3.2) e ogni Λ_0^j verifica l'ipotesi α) ed ha d_j generatori, allora Ω verifica la condizione β) con

$$\beta = \max\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}.$$

In $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ è stata introdotta la topologia di spazio numerabilmente normato mediante la famiglia di norme $(\|\cdot\|_{m,2})_{m\in\mathbb{N}}$ definite da

$$\|u\|_{m,2}^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda_0} |a(\lambda, u)|^2(1+|\lambda|^2)^m. \tag{3.3}$$

Si prova facilmente che tale famiglia è equivalente a quella delle norme Lagrangiane $(\|\cdot\|_{C^k})_{k\in\mathbb{N}_0}$. Infatti l'uguaglianza di Parseval ci fornisce: $\forall m\in\mathbb{N}_0 \exists C_m \in \mathbb{R}_+$ t.c.

$$\|u\|_{m,2}^2 = \fint |(1-\Delta)^m u(x)|^2\, dx \le C_m \|u\|_{C^{2m}}^2.$$

D'altra parte, poiché per ogni $u\in\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$, $\forall\gamma\in\mathbb{N}_0^s$

$$D^\gamma u(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a(\lambda, u)\lambda^\gamma e^{i\lambda\cdot x} \tag{3.4}$$

uniformemente rispetto ad x in $\mathbb{R}^s$, dovrà risultare

$$\|D^\gamma u(x)\|_{C^0} \le \sum_{\lambda\in\Lambda} |a(\lambda, u)|\,|\lambda^\gamma| \le \tag{3.5}$$

$$\le \left(\sum_{\lambda\in\Lambda_0} |a(\lambda, u)|^2(1+|\lambda|^2)^m\right)^{1/2} \left(\sum_{\lambda\in\Lambda_0} \frac{|\lambda^\gamma|^2}{(1+|\lambda|^2)^m}\right)^{1/2}.$$

Da questa, variando γ in modo che $|\gamma| \le k$ e fissando m in modo che $2(m-k) > d$ si avrà: $\exists C_{k,m}\in\mathbb{R}_+$ t.c.

$$\|u\|_{C^k} \le C_{k,m}\|u\|_{m,2} \quad \forall u\in\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0). \tag{3.6}$$

È così dimostrata l'equivalenza sopra enunciata. $\square$

Una famiglia di norme più idonee allo spazio $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ sembra quella così definita

$${}_a\|u\|_r = \sum_{\lambda\in\Lambda} |a(\lambda, u)|(1+|\lambda|^2)^{r/2} \qquad r\in\mathbb{N}_0. \tag{3.7}$$

Non ci sono difficoltà a riconoscere, seguendo lo schema precedente, che anche la famiglia di tali norme è equivalente alle due precedenti.

Teorema 3.1. *In $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ per ogni $r \in \mathbb{N}_0$ si ha*

$$ {}_a\|uv\|_r \leq {}_a\|u\|_r \cdot {}_a\|v\|_r \qquad \forall u, v \in \mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0) \tag{3.8} $$

cioè $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ è un'algebra normata rispetto ${}_a\| \cdot \|_r$.

Dimostrazione. In virtù del Lemma 2.4

$$ a(\lambda, uv) = \sum_{\mu \in I(\lambda)} a(\mu, u) a(\lambda - \mu, v) \qquad \forall \lambda \in \Lambda_0. \tag{3.9} $$

Fissiamo un $\omega \in \Lambda_0$ e valutiamo

$$ S_{\omega,r}(u, v) = \sum_{\lambda \in I(\omega)} |a(\lambda, uv)|(1 + |\lambda|^2)^{r/2} $$

tenendo presente la (3.9) e la diseguaglianza elementare

$$ 1 + |\lambda|^2 \leq (1 + |\mu|^2)(1 + |\lambda - \mu|^2), $$

ricaviamo

$$ S_{\omega,r}(u, v) \leq \sum_{\lambda \in I(\omega)} \sum_{\mu \in I(\lambda)} \big\{ |a(\mu, u)|(1 + |\mu|^2)^{r/2} $$
$$ |a(\lambda - \mu, v)|(1 + |\lambda - \mu|^2)^{r/2} \big\}. $$

La (3.8) si deduce direttamente dal Lemma 2.3 con

$$ a_\mu = |a(\mu, u)|(1 + |\mu|^2)^{r/2} \quad \text{e} \quad b_\mu = |a(\mu, v)|(1 + |\mu|^2)^{r/2}. \qquad \square $$

Vogliamo ora segnalare un semplice criterio di compattezza strettamente legato alla condizione β) ed alla norma ${}_a\| \cdot \|_r$.

Indichiamo con ${}_aC^r_{ap}(\mathbb{R}^s; \Omega)$ il sottospazio di $C^0_{ap}(\mathbb{R}^s; \Omega)$ costituito dalle u che hanno lo spettro delle frequenze contenuto in Ω ed hanno finita la norma

$$ {}_a\|u\|_r = \sum_{\lambda \in \Omega} |a(\lambda, u)|(1 + |\lambda|)^r \quad \text{con} \quad r \in \mathbb{R}_+. \tag{3.10} $$

Teorema 3.2. *Sia Ω un sottoinsieme numerabile di $\mathbb{R}^s$ verificante la condizione β). Per ogni $r > 0$ l'immersione di ${}_aC^r_{ap}(\mathbb{R}^s; \Omega)$ in ${}_aC^0_{ap}(\mathbb{R}^s; \Omega)$ è compatta.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di elementi di ${}_aC^r_{ap}(\mathbb{R}^s;\Omega)$ limitata in tale spazio; esista cioè $M \in \mathbb{R}_+$ tale che

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_0} |a(\lambda,u)|(1+|\lambda|)^r \leq M \qquad \forall u \in \mathcal{F}. \tag{3.11}$$

Dimostriamo che tale famiglia è di funzioni equicontinue ed equi-quasi periodiche. Poiché l'appartenenza di una u a ${}_aC^r_{ap}$ implica la sua sviluppabilità in serie di Bohr-Fourier si ricava facilmente per ogni $h \in \mathbb{R}^s$, qualunque sia $u \in \mathcal{F}$,

$$|u(x+h)-u(x)| \leq \sum_{\lambda\in\Omega} |a(\lambda,u)|\,|e^{i\lambda\cdot h}-1|. \tag{3.12}$$

Fissiamo q in modo che risulti $qr > \beta$; applicando la diseguaglianza di Hölder ricaviamo

$$|u(x+h)-u(x)| \leq \left\{\sum_{\lambda\in\Omega}\left[|a(\lambda,u)|(1+|\lambda|)^r\right]^{q'}\right\}^{1/q'} \cdot$$

$$\cdot \left\{\sum_{\lambda\in\Omega}\frac{|e^{i\lambda\cdot h}-1|^q}{(1+|\lambda|)^{rq}}\right\}^{1/q} \qquad \forall u \in \mathcal{F};$$

e per la diseguaglianza di Minkowskij

$$|u(x+h)-u(x)| \leq M\left\{\sum_{\lambda\in\Omega}\frac{|e^{i\lambda\cdot h}-1|^q}{(1+|\lambda|)^{rq}}\right\}^{1/q}. \tag{3.13}$$

Poiché la funzione

$$F(h) = M\left\{\sum_{\lambda\in\Omega}\frac{|e^{i\lambda\cdot h}-1|1^q}{(1+|\lambda|)^{rq}}\right\}^{1/q}$$

è quasi periodica in h e $F(0)=0$ si deduce in modo ovvio l'equicontinuità e la equi quasi periodicità per gli elementi di $\mathcal{F}$. Applicando il teorema di Lyusternik si stabilisce la tesi. $\square$

Teorema 3.3. *Se Λ_0 è un semigruppo di $\mathbb{R}^s(+)$ verificante l'ipotesi α), l'algebra topologica $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ come spazio numerabile normato è perfetto.*

Dimostrazione. In virtù della equivalenza tra le due famiglie di norme $(\|\cdot\|_{C^m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ e $({}_a\|\cdot\|_r)_{r\in\mathbb{N}_0}$ si può considerare $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ come intersezione della successione degli spazi di Banach $({}_aC^r_{ap}(\mathbb{R}^s;\Lambda_0))_{r\in\mathbb{N}_0}$. D'altra parte il Teorema 3.2 garantisce che per ogni $r\in\mathbb{N}_0$ l'immersione di ${}_aC^{r+1}_{ap}(\mathbb{R}^s;\Lambda_0)$ in ${}_aC^r_{ap}(\mathbb{R}^s;\Lambda_0)$ è compatta.

Questa proprietà, per gli spazi numerabilmente normati separabili implica che le parti limitate di $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ sono compatte. Da ciò segue che $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ è perfetto (cfr. Teorema 6.2 di [7]). $\square$

Ogni spazio di tipo $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ può essere ottenuto come immagine di un proiettore dal più ampio spazio ${}_aC^\infty_{ap}(\mathbb{R}^s)$.

Teorema 3.4. *Per ogni sottoinsieme numerabile Λ di $\mathbb{R}^s$, l'operatore $\sqcap_\Lambda$ definito in ${}_aC^r_{ap}(\mathbb{R}^s)$ o in $H^{m,q}_{ap}(\mathbb{R}^s)$ da*

$$\sqcap_\Lambda(u)=\sum_{\lambda\in\Lambda}a(\lambda,u)e^{i\lambda\cdot x},$$

è un proiettore lineare e continuo.

Dimostrazione. Che $\sqcap_\Lambda$ verifica la condizione $\sqcap^2_\Lambda=\sqcap_\Lambda$ è ovvio. Si deve solo provare la sua continuità. Ma anche questa è ovvia; per esempio, in ${}_aC^r_{ap}(\mathbb{R}^s)$,

$${}_a\|\sqcap_\Lambda(u)\|_r=\sum_{\lambda\in\Lambda}|a(\lambda,u)|(1+|\lambda|^2)^{r/2}\le{}_a\|u\|_r$$

anzi si ricava $|||\sqcap_\Lambda|||_{\mathcal{B}}=1$.

È utile poi osservare anche

$$\Lambda_1\cap\Lambda_2=\emptyset\implies\sqcap_{\Lambda_1}\circ\sqcap_{\Lambda_2}=0.$$

Queste proprietà sono il punto di partenza per il teorema di decomposizione stabilito in [3].

4. Algebre di PDO quasi periodici.

Ricordiamo che una funzione $q(x,\xi)$ appartenente allo spazio $C^\infty(\mathbb{R}^s_x\times\mathbb{R}^s_\xi)$ si dice di classe S^m, con $m\in\mathbb{R}$, se per ogni coppia di multiindici γ e $\delta\in\mathbb{N}^d_0$

$$|\partial^\gamma_\xi\partial^\delta_x q(x,\xi)|\le C_{\gamma,\delta}(1+|\xi|^2)^{(m-|\gamma|)/2}. \tag{4.1}$$

Si indica con L^m la classe degli Operatori Pseudodifferenziali $q(x,D)$ il cui simbolo $q(x,\xi)$ appartiene ad S^m; m si dice l'ordine di $q(x,D)$. Si pone $S^{-\infty}=\bigcap_m S^m$ e $S^{+\infty}=\bigcup_m S^m$; $L^{-\infty}$ e $L^{+\infty}$ sono le classi degli PDO corrispondenti.

Definizione 4.1. Si indica con ([3]) $APS^m(\mathbb{R}^s)$ la classe dei simboli $q(\cdot,\xi)$ che appartengono a $C^\infty_{ap}(\mathbb{R}^s)$ per ogni $\xi\in\mathbb{R}^s$ e con $APS^m(\Lambda_0)$ il sottospazio di tali simboli il cui spettro delle frequenze $\sigma(q(\cdot,\xi))$ sia contenuto in un fissato semigruppo Λ_0 indipendentemente da ξ.

I simboli della classe $APS^m(\Lambda_0)$ sono molto regolari quando Λ_0 verifica l'ipotesi α).

Teorema 4.1. *Se Λ_0 verifica l'ipotesi α) allora ogni simbolo $q(\cdot,\xi)$ della classe $APS^m(\Lambda_0)$ è dato dalla formula*

$$q(x,\xi)=\sum_{\lambda\in\Lambda_0}a[\lambda,q(\cdot,\xi)]e^{i\lambda\cdot x} \tag{4.2}$$

e tale serie converge in $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ per ogni $\xi\in\mathbb{R}^s$; inoltre, ponendo per ogni $r>d/2$

$$k_r(z)=\sum_{\mu\in\Lambda_0}\frac{e^{i\mu\cdot z}}{(1+|\mu|^2)^r}, \tag{4.2$'$}$$

si avrà

$$q(x,\xi)=⨍[(1-\Delta_t)^r q(t,\xi)]k_r(x-t)\,dt. \tag{4.2$''$}$$

Premettiamo il

Lemma 4.1. *Assegnato $q\in APS^m$ per ogni $n\in\mathbb{N}_0$ esiste $C_n\in\mathbb{R}_+$ t.c.*

$$|a[\lambda,q(\cdot,\xi)]|\le C_n\frac{(1+|\xi|^2)^{m/2}}{(1+|\lambda|^2)^n}\qquad\forall\lambda,\xi\in\mathbb{R}^s \tag{4.3}$$

e

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_0}|a[\lambda,q(\cdot,\xi)]|^2(1+|\lambda|^2)^{2n}= ⨍|1-\Delta_x)^n q(x,\xi)|^2\,dx\le C_n^2(1+|\xi|^2)^m. \tag{4.4}$$

([3]) Ci limitiamo a considerare solo simboli della classe S^m per semplicità. La costruzione che qui faremo vale anche per le classi $S^m_{\rho,\delta}$.

Dimostrazione. Partiamo dalla identità

$$(1+|\lambda|^2)^{-n}(1-\Delta_x)^n e^{-i\lambda\cdot x} = e^{-i\lambda\cdot x} \tag{4.5}$$

avendo indicato con $-\Delta_x$ l'operatore di Laplace che con le notazioni adottate è $\sum_{j=1}^{s}(-i\partial_j)^2$. Utilizzando tale formula e integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} a[\lambda, q(\cdot,\xi)] &= ⨍ q(x,\xi)e^{-i\lambda\cdot x}\,dx = \\ &= (1+|\lambda|^2)^{-n} ⨍ [(1-\Delta_x)^n q(x,\xi)]e^{-i\lambda\cdot x}\,dx. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Si deduce la (4.3) invocando le (4.1), e la (4.4) l'uguaglianza di Parseval e ancora le (4.1). □

Dimostrazione del Teorema 4.1. Consideriamo un generico $r \in \mathbb{N}_0$; fissiamo $n > d/2$ in modo che $r + n$ sia un intero pari e poniamo

$$\gamma_n(\Lambda_0) = \left(\sum_{\lambda\in\Lambda_0} \frac{1}{(1+|\lambda|^2)^n}\right)^{1/2}; \tag{4.7}$$

$\gamma_n(\Lambda_0)$ è finito per l'ipotesi α). Applicando la diseguaglianza di Hölder e la (4.4) si ha

$$\begin{aligned} {}_a\|q(\cdot,\xi)\|_r &= \sum_{\lambda\in\Lambda_0} |a[\lambda, q(\cdot,\xi)]|(1+|\lambda|^2)^{r/2} \\ &\le \gamma_n(\Lambda_0)\left(\sum_{\lambda\in\Lambda_0} |a[\lambda, q(\cdot,\xi)]|^2(1+|\lambda|^2)^{r+n}\right)^{1/2} \\ &= \gamma_n(\Lambda_0)\left(⨍ |(1-\Delta_x)^{(r+n)/2}q(x,\xi)|^2\,dx\right)^{1/2} \\ &\le \gamma_n(\Lambda_0)C_{(n+r)/2}(1+|\xi|)^m. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Poiché questa diseguaglianza è vera per ogni $r \in \mathbb{R}_+$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^s$, è provata la prima parte del teorema. Dalla (4.6) si deduce poi in modo ovvio la (4.2″). □

È importante completare questo risultato col

Teorema 4.2. *Sia fissato Λ_0 verificante l'ipotesi α) e $\big(\alpha_\lambda(\xi)\big)_{\lambda\in\Lambda_0}$ una famiglia di funzioni di classe $C^\infty(\mathbb{R}^s)$ verificante la proprietà*

$$\forall\gamma\in\mathbb{N}_0^s\quad\forall n\in\mathbb{N}_0\quad\exists C_{n,\gamma}\quad t.c.$$
$$|D^\gamma a_\lambda(\xi)|\leq C_{n,\gamma}\frac{(1+|\xi|)^{m-|\gamma|}}{(1+|\lambda|^2)^n}\qquad\forall\lambda\in\Lambda_0; \tag{4.9}$$

allora la funzione

$$b(x,\xi)=\sum_{\lambda\in\Lambda_0}a_\lambda(\xi)e^{i\lambda\cdot x} \tag{4.10}$$

appartiene alla classe $APS^m(\Lambda_0)$.

Dimostrazione. Basta osservare che, fissato $\delta\in\mathbb{N}_0^s$ e trovato n tale che $2n-|\delta|>d$ per la (4.9) risulta

$$D_\xi^\gamma D_x^\delta b(x,\xi)=\sum_{\lambda\in\Lambda_0}\lambda^\delta\big(D^\gamma\alpha_\lambda(\xi)\big)e^{i\lambda\cdot x}.$$

Contestualmente si ha

$$|D_\xi^\gamma D_x^\delta b(x,\xi)|\leq C_{n,\gamma}\bigg(\sum_{\lambda\in\Lambda_0}\frac{|\lambda^\delta|}{(1+|\lambda|^2)^n}\bigg)(1+|\xi|)^{m-|\gamma|}$$

e perciò la tesi. $\square$

Per ogni $q(x,\xi)\in APS^m(\Lambda_0)$ definiamo l'operatore $q(x,D)$ mediante la formula

$$q(x,D)u(x):=\sum_{\lambda\in\Lambda_0}\Bigg[\sum_{\mu\in I(\lambda)}a(\mu,u)a[\lambda-\mu,q(\cdot,\mu)]\Bigg]e^{i\lambda\cdot x} \tag{4.11}$$

intendendo cioè, coerentemente col Lemma 2.5,

$$a[\lambda,q(\cdot,D)u]:=\sum_{\mu\in I(\lambda)}a(\mu,u)a[\lambda-\mu,q(\cdot,\mu)]\,. \tag{4.12}$$

Osserviamo che la (4.12) ha significato nella sola ipotesi che si prenda u nello spazio $B_{ap}^1(\mathbb{R}^s;\lambda_0)$. Il significato della (4.11) verrà stabilito sia nello spazio $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ sia negli altri $H_{ap}^{n,q}(\mathbb{R}^s;\Lambda_0)$.

Teorema 4.3. *Fissiamo Λ_0 verificante l'ipotesi α) ed un simbolo $q \in APS^m(\Lambda_0)$. L'operatore $u \to q(x, D)u(x)$ definito mediante la (4.11) è lineare e continuo da $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ in $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$.*

Dimostrazione. Introduciamo in primo luogo le seguenti norme globali per i simboli $q(x, \xi)$ che appartengono ad $APS^m(\Lambda_0)$

$$|||q|||_{r,m} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^s} \frac{{}_a\|q(\cdot, \xi)\|_r}{(1 + |\xi|^2)^{m/2}}. \tag{4.13}$$

La (4.8) implica che tutte le $||| \cdot |||_{r,m}$ sono finite. Consideriamo le somme finite

$$S_{\omega,r} = \sum_{\lambda \in I(\omega)} \left[\sum_{\mu \in I(\lambda)} |a(\mu, u)| \cdot |a[\lambda - \mu, q(\cdot, \mu)]| \right] (1 + |\lambda|^2)^{r/2}.$$

Procedendo come abbiamo fatto per il Lemma 2.3, tenendo presente la diseguaglianza elementare $1 + |\lambda|^2 \le (1 + |\mu|^2)(1 + |\lambda - \mu|^2)$, si stabilisce facilmente

$$S_{\omega,r} \le \tag{4.14}$$

$$\le \sum_{\mu \in I(\omega)} |a(\mu, u)|(1 + |\mu|^2)^{r/2} \left[\sum_{\lambda \in I(\mu,\omega)} |a[\lambda - \mu, q(\cdot, \mu)]|(1 + |\lambda - \mu|^2)^{r/2} \right].$$

Ora, per la (4.8), qualunque siano ω e μ in Λ_0

$$\sum_{\lambda \in I(\mu,\omega)} |a[\lambda - \mu, q(\cdot, \mu)]|(1 + |\lambda - \mu|^2)^{r/2} \le \tag{4.15}$$

$$\le \sum_{\nu \in \Lambda} |a[\nu, q(\cdot, \mu)]|(1 + |\nu|^2)^{r/2} = {}_a\|q(\cdot, \mu)\|_r .$$

Da (4.14) e (4.15) deduciamo

$$\sum_{\lambda \in I(\omega)} \left| \sum_{\mu \in I(\lambda)} a(\mu, u) a[\lambda - \mu, q(\cdot, \mu)] \right| (1 + |\lambda|^2)^{r/2} \le \tag{4.16}$$

$$\le |||q|||_{r,m} \cdot \sum_{\lambda \in I(\omega)} |a(\mu, u)|(1 + |\mu|)^{(r+m)/2}.$$

Abbiamo quindi, passando a limite per $|\omega| \to \infty$,

$${}_a\|q(\cdot, D)u\|_r \le |||q|||_{r,m} \cdot {}_a\|u\|_{r+m}, \quad \forall u \in \mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0) \tag{4.17}$$

maggiorazione che implica la tesi del Teorema 4.3, data l'arbitrarietà di r.

Si noti che $|||q|||_{r,m}$ può essere maggiorato con le costanti che compaiono nella (4.1).

Teorema 4.4. *Fissiamo* Λ_0 *verificante l'ipotesi* $\alpha)$ *ed un simbolo* $q \in APS^m(\Lambda_0)$. *L'operatore* $u \to q(x, D)u(x)$ *definito mediante la (4.11) si prolunga ad un operatore lineare e continuo da* $H_{ap}^{m+r,q}(\mathbb{R}^s, \Lambda_0)$ *a* $H_{ap}^{r,q}(\mathbb{R}^s, \Lambda_0)$ *per ogni* $r \in \mathbb{R}_+$ *e* $q \in]1, +\infty[$.

Dimostrazione. Come nella dimostrazione precedente si tratta di maggiorare la somma finita

$$S_{\omega,r,q} = \sum_{\lambda \in I(\omega)} \left[\sum_{\mu \in I(\lambda)} |a(\mu, u)|\, |a[\lambda - \mu, q(\cdot, \mu)]| \right]^{q'} (1 + |\lambda|^2)^{q'r/2}.$$

Poniamo

$$a_\mu = |a(\mu, u)|(1 + |\mu|^2)^{(r+m)/2}$$

$$b_{\lambda-\mu,\mu} = |a[\lambda - \mu, q_0(\cdot, \mu)]|(1 + |\lambda - \mu|^2)^{r/2}$$

$$q_0(x, \xi) = \frac{q(x, \xi)}{(1 + |\xi|^2)^{m/2}}.$$

Intanto possiamo stabilire

$$S_{\omega,r,q} \leq \sum_{\lambda \in I(\omega)} \left[\sum_{\mu \in I(\lambda)} a_\mu b_{\lambda-\mu,\mu} \right]^{q'}. \tag{4.18}$$

D'altra parte la diseguaglianza di Hölder ci dà

$$\left[\sum_{\mu \in I(\lambda)} a_\mu b_{\lambda-\mu,\mu} \right]^{q'} \leq \left[\sum_{\mu \in I(\lambda)} b_{\lambda-\mu,\mu} \right]^{q'/q} \cdot \sum_{\mu \in I(\lambda)} b_{\lambda-\mu,\mu} a_\mu^{q'}.$$

Osserviamo inoltre

$$\sum_{\mu \in I(\lambda)} b_{\lambda-\mu,\mu} = \sum_{\mu \in I(\lambda)} |a[\lambda - \mu, q_0(\cdot, \mu)]|(1 + |\lambda - \mu|^2)^{r/2} \leq \tag{4.19}$$

$$\leq {}_a\|q_0(\cdot, \mu)\|_r \leq |||q_0|||_r.$$

Sostituendo quindi nella (4.18) ricaviamo

$$S_{\omega,r,q} \leq |||q_0|||_r^{q'/q} \sum_{\lambda \in I(\omega)} \sum_{\mu \in I(\lambda)} b_{\lambda-\mu,\mu} a_\mu^{q'} = \tag{4.20}$$

$$= |||q_0|||_r^{q'/q} \sum_{\mu \in I(\omega)} \sum_{\lambda \in I(\mu,\omega)} b_{\lambda-\mu,\mu} a_\mu^{q'} \leq |||q_0|||_r^{1+q'/q} \sum_{\mu \in I(\omega)} a_\mu^{q'}.$$

Poiché $1 + q'/q = q'$ abbiamo

$$(S_{\omega,r,q})^{1/q'} \leq |||q_0|||_r \left(\sum_{\mu \in I(\omega)} a_\mu^{q'} \right)^{1/q'}. \tag{4.21}$$

Cioè, per ogni $\omega \in \Lambda_0$

$$\left\{ \sum_{\lambda \in I(\omega)} \left| \sum_{\mu \in I(\lambda)} a(\mu, u) a[\lambda - \mu, q(\cdot, \mu)] \right|^{q'} (1 + |\lambda|^2)^{rq'/2} \right\}^{1/q'} \leq$$

$$\leq |||q_0|||_r \left[\sum_{\mu \in I(\omega)} |a(\mu, u)|^{q'} (1 + |\mu|^2)^{q'(r+m)/2} \right]^{1/q'}.$$

Si deduce in conclusione, passando a limite

$$\|q(x, D)u(x)\|_{r,q} \leq |||q|||_{r,m} \cdot \|u\|_{r+m,q}, \tag{4.22}$$

da cui segue la tesi. $\square$

In $APS^m(\Lambda_0)$ si può considerare la topologia indotta dalle norme $|||\cdot|||_{r,m}$ per $r \in \mathbb{N}_0$

$$q_n \xrightarrow{S^m} q_0 \Longleftrightarrow q_n, q_0 \in APS^m(\Lambda_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \text{ e}$$
$$|||q_n - q_0|||_{r,m} \to 0 \text{ per } n \to \infty \quad \forall r \in \mathbb{N}_0. \tag{4.23}$$

Dalle formule (4.17) e (4.22) si deduce anche il

Teorema 4.5. *Se Λ_0 verifica l'ipotesi α) la applicazione*

$$(u, q) \longrightarrow q(x, D)u(x)$$

in quanto definita da

$$\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0) \times APS^m(\Lambda_0) \longrightarrow \mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$$

è continua anche rispetto al simbolo q in S^m uniformemente al variare di u nelle parti limitate di $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$; in quanto definita da

$$H_{ap}^{m+r,q}(\mathbb{R}^s, \Lambda_0) \times APS^m(\Lambda_0) \longrightarrow H_{ap}^{m,q}(\mathbb{R}^s; \Lambda_0)$$

è continua anche rispetto al simbolo q relativamente alla norma $|||\cdot|||_{r,m}$, uniformemente al variare di u nelle parti limitate di $H_{ap}^{m+r,q}$.

Alla costruzione dell'aggiunto dell'Operatore Pseudo Differenziale $q(x, D)$ premettiamo alcune osservazioni.

Consideriamo $q(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^s_x \times \mathbb{R}^s_\xi)$, utilizzando direttamente le (4.1) oppure lo sviluppo (4.2) si riconosce

$$q \in APS^m(\Lambda_0) \Longleftrightarrow \bar{q} \in APS^m(-\Lambda_0),$$

essendo $\bar{q}$ la funzione complessa coniugata di q. Abbiamo inoltre

$$a[-\lambda, \overline{q(\cdot,\xi)}] = \overline{a[\lambda, q(\cdot,\xi)]} \qquad \forall \lambda \in \Lambda_0,$$

$$_a\|q(\cdot,\xi)\|_r = {}_a\|\overline{q(\cdot,\xi)}\|_r \qquad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Ricordiamo (cfr. [2]) che per ogni $T \in \mathcal{S}'_{ap}(\Lambda_0)$

$$\langle T \mid u\rangle = \sum_{\lambda\in\Lambda_0} a(\lambda, T)\overline{a(\lambda, u)} \quad \forall u \in \mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0) \tag{4.24}$$

e che tale serie risulta assolutamente convergente. Abbiamo perciò

$$\langle T \mid q(\cdot, D)u\rangle = \lim_{|\omega|\to+\infty} \sum_{\lambda\in I(\omega)} a(\lambda, T)\overline{a[\lambda, q(x, D)u(x)]}. \tag{4.25}$$

D'altra parte

$$\sum_{\lambda\in I(\omega)} a(\lambda, T)\overline{a[\lambda, q(x, D)u(x)]} =$$

$$= \sum_{\lambda\in I(\omega)} a(\lambda, T) \sum_{\mu\in I(\lambda)} \overline{a(\mu, u)a[\lambda-\mu, q(\cdot,\mu)]} =$$

$$= \sum_{\mu\in I(\omega)} \overline{a(\mu, u)} \sum_{\lambda\in I(\lambda,\omega)} a(\lambda, T)a[\mu-\lambda, \overline{q(\cdot,\mu)}].$$

Dimostriamo il seguente

Lemma 4.2. *Siano: Λ_0 verificante l'ipotesi α), $q \in APS^m(\Lambda_0)$, $u \in \mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ e $T \in \mathcal{S}'_{ap}(\Lambda_0)$; per ogni $\mu \in \Lambda_0$ è finita la somma*

$$b_\mu = \sum_{\lambda\geq\mu} a(\lambda, T)a[\mu-\lambda, \overline{q(\cdot,\mu)}]$$

la famiglia $(b_\mu)_{\mu\in\lambda_0}$ ha al più crescenza polinomiale per $|\mu| \longrightarrow +\infty$ e si ha

$$\langle T \mid q(\cdot, D)u\rangle = \sum_{\mu\in\lambda} \overline{a(\mu, u)}b_\mu. \tag{4.26}$$

Dimostrazione. Ricordiamo che (cfr. [2], Teorema 4.5) per ogni $T \in \mathcal{S}'_{ap}(\Lambda_0)$ esiste $f \in B^2_{ap}(\mathbb{R}^2, \Lambda_0)$ ed $h \in \mathbb{N}_0$ tale che $a(\lambda, T) = (1 + |\lambda|^2)^h a(\lambda, f)$.

Inoltre per la (4.6) abbiamo

$$\sum_{\mu \leq \lambda \leq \omega} a(\lambda, T) a[\mu - \lambda, \overline{q(\cdot, \mu)}] = \tag{4.27}$$

$$= \fint [(1 - \Delta_x)^k \overline{q(x, \mu)}] \cdot \sum_{\mu \leq \lambda \leq \omega} e^{-i(\mu-\lambda)\cdot x} \frac{(1 + |\lambda|^2)^h a(\lambda, f)}{(1 + |\mu - \lambda|^2)^k} \, dx$$

qualunque sia $k \in \mathbb{N}_0$. Prendendo $k = h + n/2$ con n verificante la condizione $n > d/2$, abbiamo

$$\left| \sum_{\mu \leq \lambda \leq \omega} e^{-i(\mu-\lambda)\cdot x} \frac{(1 + |\lambda|^2)^h a(\lambda, f)}{(1 + |\lambda - \mu|^2)^k} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{\mu \leq \lambda \leq \omega} \left[(1 + |\lambda|^2)^h |a(\lambda, f)| \frac{(1 + |\mu|^2)^k}{(1 + |\lambda|^2)^k} \right] \leq$$

$$\leq \left[\sum_{\mu \leq \lambda \leq \omega} |a(\lambda, f)|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{\mu \leq \lambda \leq \omega} \frac{1}{(1 + |\lambda|^2)^n} \right]^{1/2} (1 + |\mu|^2)^{h+n/2} \leq$$

$$\leq \|f\|_{B^2} \gamma_n(\Lambda_0)(1 + |\mu|^2)^{h+n/2}.$$

D'altra parte osserviamo che dalla (4.2) segue

$$|(1 - \Delta_x)^k \overline{q(x, u)}| \leq \sum_{-\lambda \in \Lambda} |a[\lambda, \overline{q(\cdot, \mu)}]|(1 + |\lambda|^2)^k \tag{4.28}$$

$$= {}_a\|\bar{q}(\cdot \mu)\|_{2k} \leq |||\bar{q}|||_{2k}(1 + |\mu|^2)^{m/2}.$$

Sostituendo quindi nella (4.27) si ottiene

$$\left| \sum_{\mu \leq \lambda \leq \omega} a(\lambda, T) a[\mu - \lambda, \overline{q(\cdot, \mu)}] \right| \leq |||\bar{q}|||_{2k} \|f\|_{B^2} \gamma_n(\Lambda_0)(1 + |\mu|^2)^{h+(n+m)/2}$$

da cui segue facilmente

$$|b_\mu| \leq |||\bar{q}|||_{2k} \|f\|_{B^2} \gamma_n(\Lambda_0)(1 + |\mu|^2)^{h+(n+m)/2} \tag{4.29}$$

il nostro asserto è così dimostrato. $\square$

Siamo ora in grado di dimostrare il

Teorema 4.6. *Qualunque sia $q \in APS^m(\Lambda_0)$ con Λ_0 verificante l'ipotesi α), l'operatore aggiunto di $u \longrightarrow q(x, D)u$ è definito dalla formula*

$$q^*(x, D)T \sim \sum_{\mu \in \Lambda_0} \Big[\sum_{\lambda \in I'(\mu)} a(\lambda, T) a[\mu - \lambda, \overline{q(\cdot, \mu)}] e^{i\mu \cdot x} \Big], \tag{4.30}$$

e, fissato $r \in \mathbb{N}_0$, per ogni $T \in H_{ap}^{-r+m,2}(\mathbb{R}^s; \Lambda_0)$ si ha

$$\|q^*(x, D)T\|_{-r,2} \leq |||\bar{q}|||_r \cdot \|T\|_{-r+m,2}. \tag{4.31}$$

Dimostrazione. Dalla definizione di aggiunto dovrà risultare

$$\langle T \mid q(x, D)u \rangle = \langle q^*(x, D)T \mid u \rangle \tag{4.32}$$

per ogni $u \in \mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ e per ogni $T \in \mathcal{S}'_{ap}(\Lambda_0)$. Da (4.26) e (4.32) prendendo $u = \exp(i\mu \cdot x)$ si ricava la (4.30). La maggiorazione (4.31) può essere stabilita direttamente con lo stesso procedimento con cui si è pervenuti alla (4.22). $\square$

La (4.9) fornisce di $q(x, D)u(x)$ lo sviluppo in serie di Bohr-Fourier, convergente in $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ per ogni $u \in \mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$. Lo sviluppo (4.30) è della stessa natura e la sua convergenza è stata provata in $\mathcal{S}'_{ap}(\Lambda_0)$ quando T sia fissato in tale spazio. È però evidente che, dove si consideri T in $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0) \subset \mathcal{S}'_{ap}(\Lambda_0)$, lo sviluppo (4.30) è della stessa natura del (4.9), salvo che è relativo al simbolo $\bar{q} \in APS^m(-\Lambda_0)$ e coinvolge le frequenze $\mu - \lambda$ appartenenti $a - \Lambda_0$. Vogliamo ora segnalare un altro sviluppo per $q(x, D)u(x)$ $[q^*(x, D)T]$ di natura ibrida che è ovvio quando $q(x, D)$ è un operatore differenziale ordinario.

Teorema 4.7. *Comunque si consideri $q \in APS^m(\Lambda_0)$ con Λ_0 verificante l'ipotesi α) per ogni $u \in \mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ si ha*

$$q(x, D)u(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_0} a(\lambda, u) q(x, \lambda) e^{i\lambda \cdot x}, \tag{4.33}$$

$$q^*(x, D)u(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_0} a(\lambda, u) \overline{q(x, -\lambda)} e^{i\lambda \cdot x}. \tag{4.34}$$

La convergenza della serie essendo quella delle somme sulle parti finite di Λ_0 nella topologia di $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$.

Dimostrazione. La (4.33) si prova facilmente se $u(x)$ è un polinomio trigonometrico

$$u(x) = \sum_{\lambda \in K} a(\lambda, u) e^{i\lambda \cdot x} \qquad K \in \mathcal{F}(\Lambda_0).$$

Infatti per la (4.11)

$$(4.35) \quad q(x, D)u(x) = \sum_{\nu \in \Lambda_0} \left\{ \sum_{\mu \in I(\nu)} a(\mu, u) a[\nu - \mu, q(\cdot, \mu)] \right\} e^{i\nu \cdot x} =$$

$$= \lim_{|\omega| \to \infty} \sum_{\nu \in I(\omega)} \left\{ \sum_{\mu \in I(\nu) \cap K} a(\mu, u) a[\nu - \mu, q(\cdot, \mu)] \right\} e^{i\nu \cdot x} = \lim_{|\omega| \to \infty} S_\omega.$$

Eseguendo le solite inversioni, considerando ω tale che $K \subset I(\omega)$ si deduce

$$S_\omega = \sum_{\mu \in K \cap I(\omega)} \sum_{\mu \leq \nu \leq \omega} a(\mu, u) a[\nu - \mu, q(\cdot, \mu)] e^{i\nu \cdot x} =$$

$$= \sum_{\mu \in K} a(\mu, u) e^{i\mu \cdot x} \sum_{\mu \leq \nu \leq \omega} a[\nu - \mu, q(\cdot, \mu)] e^{i(\nu - \mu) \cdot x}$$

da cui segue facilmente, essendo K finito,

$$\lim_{|\omega| \to \infty} S_\omega = \sum_{\mu \in K} a(\mu, u) e^{i\mu \cdot x} q(x, \mu)$$

in virtù della (4.2).

Nel caso generale fissato

$$P_I(x) = \sum_{\lambda \in I} a(\mu, u) e^{i\lambda \cdot x} \qquad I \in \mathcal{F}(\Lambda_0)$$

possiamo scrivere

$$q(x, D)u(x) = q(x, D)P_I(x) + q(x, D)[u(x) - P_I(x)].$$

Da questa applicando la (4.17), deduciamo, per ogni $r \in \mathbb{N}_0$

$$(4.36) \qquad {}_a\|q(x, D)u(x) - \sum_{\lambda \in I} a(\lambda, u) q(x, \lambda) e^{i\lambda \cdot x}\|_r \leq$$

$$\leq {}_a\|q(x, D)[u(x) - P_I(x)]\|_r \leq |||q|||_{r,m}\, {}_a\|u - P_I\|_{r+m}.$$

Ciò prova la tesi relativamente alla (4.33). $\square$

Al problema della composizione di due PDO di tipo a.p. premettiamo il

Lemma 4.3. *Consideriamo* $q_i \in APS^{m_i}(\Lambda_0)$, $i = 1, 2$, *con* Λ_0 *verificante l'ipotesi* α)*; definiamo la funzione*

$$(q_2 \# q_1)(x, \eta) := q_2(x, \eta + D_x) q_1(x, \eta) \tag{4.37}$$

per ogni $(x, \eta) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s$*; abbiamo* $q_2 \# q_1 \in APS^{m_1+m_2}(\Lambda_0)$.

Dimostrazione. Intanto osserviamo

$$q_2(x, \xi) \in APS^{m_2}(\Lambda_0) \Longleftrightarrow q_2(x, \eta + \xi) \in APS^{m_2}(\Lambda_0)$$

per ogni $\eta \in \mathbb{R}^s$. Ciò significa che possiamo esplicitare il secondo membro della (4.37) utilizzando la (4.11). Abbiamo

$$\begin{aligned} q_2(x, \xi + D_x) q_1(x, \xi) = \\ = \sum_{\lambda \in \Lambda_0} \left[\sum_{\mu \in I(\lambda)} a[\mu, q_1(\cdot, \xi)] a[\lambda - \mu, q_2(\cdot, \xi + \mu)] \right] e^{i\lambda \cdot x}. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Poniamo

$$a_\lambda(\xi) = \sum_{\mu \in I(\lambda)} a[\mu, q_1(\cdot, \xi)] a[\lambda - \mu, q_2(\cdot, \xi + \mu)].$$

Applicando la regola di Leibniz, per ogni s-multiindice γ ricaviamo

$$\begin{aligned} D_\xi^\gamma a_\lambda(\xi) = \\ = \sum_{\gamma' + \gamma'' = \gamma} \frac{\gamma!}{\gamma'! \gamma''!} \sum_{\mu \in I(\lambda)} a[\mu, D_\xi^{\gamma'} q_1(\cdot, \xi)] a[\lambda - \mu, D_\xi^{\gamma''} q_2(\cdot, \xi + \mu)]. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Per ciascuno dei fattori che figurano nella somma interna utilizziamo il Lemma 4.1 e le ovvie osservazioni

$$\begin{aligned} D_\xi^{\gamma'} q_2(x, \xi) \quad &\in APS^{m_2 - |\gamma'|}(\Lambda_0) \\ D^{\gamma''} q_2(x, \xi + \mu) \ &\in APS^{m_2 - |\gamma''|}(\Lambda_0). \end{aligned}$$

Perciò, con $n_i > d$ per $i = 1, 2$ otteniamo

$$\begin{aligned} |a[\mu, D_\xi^{\gamma'} q_1(\cdot, \xi)]| &\le c_{1,\gamma'} \frac{(1 + |\xi|)^{m_1 - |\gamma'|}}{(1 + |\mu|^2)^{n_1}} \\ |a[\lambda - \mu, D^{\gamma''} q_2(\cdot, \xi + \mu)]| &\le c_{2,\gamma''} \frac{(1 + |\xi + \mu|)^{m_2 - |\gamma''|}}{(1 + |\lambda - \mu|^2)^{n_2}} \end{aligned} \tag{4.40}$$

ove le costanti $c_{i,\gamma'}$ dipendono anche da n_i. Sostituiamo nella (4.39), utilizzando la diseguaglianza elementare $1+|\xi+\mu| \le (1+|\xi|)(1+|\mu|)$ se $m_2-|\gamma''| \ge 0$ e $1+|\xi+\mu| \ge (1+|\xi|)/(1+|\mu|)$ se $m_2-|\gamma''|<0$; otteniamo

$$(4.41) \qquad |D^\gamma a_\lambda(\xi)| \le \sum_{\gamma'+\gamma''=\gamma} \frac{\gamma!}{\gamma'!\gamma''!} c_{1,\gamma'} c_{2,\gamma''} (1+|\xi|)^{m_1+m_2-|\gamma|} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\mu\in I(\lambda)} \frac{1}{(1+|\mu|^2)^{r_1}} \cdot \frac{1}{(1+|\lambda-\mu|^2)^{n_2}}.$$

Se $m_2-|\gamma''| \ge 0$ si deve porre $r_1 = n_1-m_2+|\gamma''|$; se $m_2-|\gamma''|<0$ si deve porre $r_1 = n_1+m_2-|\gamma''|$. Il più piccolo valore possibile per r_1 è

$$r_* = \min\{n_1-m_2, n_1+m_2-|\gamma|\}.$$

Otteniamo perciò

$$(4.42) \qquad |D^\gamma a_\lambda(\xi)| \le c_\gamma (1+|\xi|)^{m_1+m_2-|\gamma|} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\mu\in I(\lambda)} \frac{1}{(1+|\mu|^2)^{r_*}} \cdot \frac{1}{(1+|\lambda-\mu|^2)^{n_2}} =$$

$$= c_\gamma \frac{(1+|\xi|)^{m_1+m_2-|\gamma|}}{(1+|\lambda|^2)^n} \sum_{\mu I(\lambda)} \frac{(1+|\lambda|^2)^n}{(1+|\mu|^2)^{r_*}(1+|\lambda-\mu|^2)^{n_2}} \le$$

$$\le c_\gamma \frac{(1+|\xi|)^{m_1+m_2-|\gamma|}}{(1+|\lambda|^2)^n} \sum_{\mu\in I(\lambda)} \frac{1}{(1+|\mu|^2)^{r_*-n}} \cdot \frac{1}{(1+|\lambda-\mu|^2)^{n_2-n}}.$$

Assegnato comunque $n \in \mathbb{N}$ fissiamo n_1 in modo che $r_*-n > d$ e n_2 in modo che $n_2-n>d$, dalla ultima maggiorazione scritta si deduce allora che le $a_\lambda(\xi)$ verificano la (4.9) con $m = m_1+m_2$ e perciò il lemma è dimostrato. □

Possiamo ora dimostrare il teorema conclusivo della nostra costruzione

Teorema 4.8. *Siano $q \in APS^{m_i}(\Lambda_0)$, $i = 1, 2$, con Λ_0 verificante l'ipotesi α). Poniamo*

$$(4.43) \qquad (q_2\circ q_1)(x,D)u(x) = q_2(x,D)[q_1(x,D)u(x)]$$

per ogni $u \in \mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$. Sono vere le seguenti asserzioni:

a) *$q_2\circ q_1$ è un* PDO *di classe $APL^{m_1+m_2}(\Lambda_0)$;*

b) *$(q_2\circ q_1)(x,\xi) = q_2(x,\xi+D_x)q_1(x,\xi) \quad \forall x,\xi \in \mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^s$;*

c) *per ogni $r \in \mathbb{N}_0$*

$$|||q_2\circ q_1|||_{r,m_1+m_2} \le |||q_2|||_{r,m_2} \cdot |||q_1|||_{r,m_1}.$$

Dimostrazione. L'applicazione (4.43) da $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ in $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ è lineare e continua per il Teorema 4.3. Si deve provare che è un PDO di tipo a.p. A tal fine utilizzeremo la (4.33) tenendo presente che essa individua univocamente il simbolo dell'operatore. Applicando questa formula relativamente a $q_2(x, D)$ abbiamo

$$q_2(x, D)[q_1(x, D)u(x)] = \sum_{\lambda\in\Lambda_0} a[\lambda, q_1(x, D)u(x)]q_2(x, \lambda)e^{i\lambda\cdot x} =$$

$$= \sum_{\lambda\in\Lambda_0}\Bigg[\sum_{\mu\in I(\lambda)} a(\mu, u)a[\lambda-\mu, q_1(\cdot, \mu)]\Bigg]q_2(x, \lambda)e^{i\lambda\cdot x} =$$

$$= \sum_{\mu\in\Lambda_0} a(\mu, u)e^{i\mu\cdot x}\cdot\sum_{\lambda\in I'(\mu)} a(\lambda-\mu, q_1(\cdot, \mu)]q_2(x, \lambda)e^{i(\lambda-\mu)\cdot x} =$$

$$= \sum_{\mu\in\Lambda_0} a(\mu, u)(q_2\#q_1)(x, \mu)e^{i\mu\cdot x}.$$

Per l'ultimo passaggio basta osservare, facendo la sostituzione $\lambda - \mu = \eta$,

$$\sum_{\lambda\in I'(\mu)} a[\lambda-\mu, q_1(\cdot, \mu)]q_2(x, \lambda)e^{i(\lambda-\mu)\cdot} =$$

$$= \sum_{\eta\in\Lambda_0} a[\eta, q_1(\cdot, \mu)]q_2(x, \mu+\eta)e^{i\eta\cdot x} =$$

$$= q_2(x, \mu + D_x)q_1(x, \mu) = (q_2\#q_1)(x, \mu).$$

Dal Lemma 4.3 seguono perciò a) e b); la c) si dimostra facilmente utilizzando la (4.17) e la stessa definizione di $|||\cdot|||_{r,m}$. $\square$

Le implicazioni di questo teorema sono molteplici. Ci limiteremo a riportarne solo alcune

Teorema 4.9. *Fissiamo Λ_0 verificante l'ipotesi α). Sono vere le seguenti asserzioni*

a) *$APL^0(\Lambda_0)$ è un'algebra topologica.*

b) *Dato $q \in APS^m(\Lambda_0)$, l'operatore $u \to q(x, D)u$ da $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ in $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ è invertibile se e solo se lo è $u \to q_0(x, D)u(x)$ con*

$$q_0(x, \xi) = \frac{q(x, \xi)}{(1 + |\xi|^2)^{m/2}}.$$

c) *Qualunque sia $q \in APS^\infty(\Lambda_0)$, l'operatore $u \to q(x, D)u(x)$ in quanto agente in $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ è compatto.*

Dimostrazione. La a) è ovvia conseguenza del Teorema 4.8. La b) si deduce dalla invertibilità dell'operatore $(1-\Delta_x)^{m/2}$, corrispondente al simbolo $(1+|\xi|^2)^{m/2}$. La c) discende dal fatto che $\mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0)$ è perfetto e la (4.17) significa che l'operatore lineare $u \to q(x, D)u$ trasforma limitati in limitati. □

5. Costruzione dell'Operatore Risolvente.

La risoluzione dell'Equazione pseudodifferenziale

$$q(x, D)u(x) = f(x) \tag{5.1}$$

può essere effettuata in modo agevole negli spazi di funzioni quasi periodiche relativi ad un semigruppo regolare Λ_0 fissato.

La (4.11) consente di tradurre la (5.1) nel sistema di infinite equazioni lineari in infinite incognite

$$\sum_{\lambda\in I(\nu)} a(\lambda, u)a[\nu-\lambda, q(\cdot, \lambda)] = a(\nu, f) \quad \forall \nu \in \Lambda_0. \tag{5.2}$$

Il caso in cui il simbolo $q(x, \xi)$, che supporremo di classe $APS^m(\Lambda_0)$ sia indipendente da x conduce al sistema

$$a(\nu, u)q(\nu) = a(\nu, f) \quad \forall \nu \in \Lambda_0, \tag{5.3}$$

la cui discussione è del tutto analoga a quella fatta per gli operatori differenziali ordinari aventi i coefficienti costanti. Comunque, l'ipotesi $q(\nu) \neq 0$ per ogni $\nu \in \Lambda_0$ conduce alla univoca determinazione dei coefficienti $(a(\lambda, u))_{\lambda\in\Lambda_0}$ della incognita u. La appartenenza però della u a precisi spazi funzionali di funzioni quasi periodiche può essere stabilita in relazione ad adeguate ipotesi di natura algebrica su $q(x, \cdot)$.

In armonia con questa semplice situazione dimostriamo il

Teorema 5.1. *Se sono verificate le condizioni*

$$\tilde{q}(\nu) := \fint q(x, \nu)\, dx \neq 0 \qquad \forall \nu \in \Lambda_0, \tag{5.4}$$

cioè $a[0, q(\cdot, \nu)] \neq 0$ *per ogni* $\nu \in \Lambda_0$*, il sistema*

$$\sum_{\lambda\in I(\nu)} x_\lambda a[\nu-\lambda, q(\cdot, \lambda)] = b_\nu, \quad \nu \in \Lambda_0 \tag{5.5}$$

ha una ed una sola soluzione $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_0}$ *qualunque sia la famiglia* $(b_\lambda)_{\lambda\in\lambda_0}$.

Dimostrazione. Per $\nu = \mathbf{0}$ la (5.5) diventa

$$x_0 a[0, q(\cdot, 0)] = a(0, f)$$

che determina univocamente x_0.

Poniamo, qualunque sia $\lambda = \ell_1 \lambda_*^1 + \cdots + \ell_d \lambda_*^d \in \Lambda_0$

$$L(\lambda) = \ell_1 + \cdots + \ell_d. \tag{5.6}$$

Supponiamo d'aver determinato, mediante il sistema (5.5), univocamente tutte le x_λ per le quali $L(\lambda) \leq k$ con $k \in \mathbb{N}_0$.

Proviamo che conseguentemente si possono determinare, col sistema (5.5), univocamente tutte le x_λ tali che $L(\lambda) = k + 1$.

Sia $\lambda' \in \Lambda_0$ tale che $L(\lambda') = k + 1$. Si può certamente porre

$$I(\lambda') = \{\lambda'\} \cup J(\lambda') \tag{5.7}$$

e si avrà

$$L(\mu) \leq k \qquad \forall \mu \in J(\lambda'). \tag{5.8}$$

Basta a tal fine osservare che in ogni $I(\nu)$ la funzione $L(\lambda)$ assume massimo stretto in ν.

Consideriamo ora l'equazione delle (5.5) corrispondente a $\nu = \lambda'$: potremo scrivere

$$\sum_{\lambda \in J(\lambda')} x_\lambda a[\lambda' - \lambda, q(\cdot, \lambda)] + x_{\lambda'} a[0, q(\cdot, \lambda')] = a(\lambda', f). \tag{5.9}$$

Poiché tutte le x_λ con $\lambda \in J(\lambda')$ sono state determinate, da quest'ultima si determina univocamente $x_{\lambda'}$. Ma con le somme $\lambda' = \lambda_0 + \lambda_*^j$ e λ_0 tale che $L(\lambda_0) = k$, si ottengono tutti i λ' per cui $L(\lambda') = k + 1$. Perciò con le (5.9) si ricavano tutte le $x_{\lambda'}$ per cui $L(\lambda') = k + 1$.

Applicando il principio di induzione si stabilisce la tesi. $\square$

Fissiamo $q \in APS^m(\Lambda_0)$ e consideriamo l'operatore

$$\mathcal{Q}(u) = q(x, D)u \qquad u \in \mathcal{S}_{ap}(\Lambda_0) \tag{5.10}$$

in quanto densamente definito in $B^2_{ap}(\mathbb{R}^s, \Lambda_0)$. Se è $m \leq 0$, l'operatore lineare $\mathcal{Q}$ ha un prolungamento continuo a tutto $B^2_{ap}(\mathbb{R}^s; \Lambda_0)$ in virtù del Teorema 4.4. Se è $m > 0$, $\mathcal{Q}$ ha un *prolungamento chiuso* ad un sottospazio $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}$ di $B^2_{ap}(\mathbb{R}^s; \Lambda_0)$.

Infatti da

$$u_n \to 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}(u_n) \to v_0 \quad \text{in} \quad B^2_{ap}$$

si deduce facilmente

$$⨍ v_0(x)P(x)\,dx = 0 \qquad \forall P \in \mathcal{P}(\Lambda_0),$$

da cui segue $v_0 \equiv 0$ e perciò la nostra affermazione.

Continueremo ad indicare con $q(x, D)$ il prolungamento chiuso $\widetilde{\mathcal{Q}}$ di $q(x, D)$ relativamente allo spazio di Hilbert $B^2_{ap}(\mathbb{R}^s; \Lambda_0)$. Ci proponiamo di costruire il Risolvente di $\widetilde{\mathcal{Q}}$ sotto la seguente generale

Ipotesi ω). *L'operatore pseudodifferenziale $\tilde{q}(D)$ avente per simbolo*

$$\tilde{q}(\xi) = ⨍ q(x, \xi)\,dx \tag{5.11}$$

è di tipo $\mathcal{H}\Gamma$-settoriale.

Precisiamo che questa ipotesi significa:

I) Γ è un angolo proprio del piano complesso

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Arg} z \in [\theta', \theta'']\} \quad \text{con} \quad -\pi < \theta' < \theta'' < \pi \ (^4). \tag{5.12}$$

II) $\mathcal{H}$ è un cono convesso di $\mathbb{R}^s$.

III) Esiste $\delta > 0$ tale che

$$\tilde{q}(\mathcal{H}) \cap B^c_\delta \subset \Gamma \tag{5.13}$$

essendo $B^c_\delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \delta\}$.

Osserviamo che in tutti i casi in cui $\tilde{q}(\xi)$ è ellittico, oppure ipoellittico, oppure $\mathcal{H}$-ipoellittico o infine $\mathcal{H}$-regolare ([5]), esso è $\mathcal{H}\Gamma$-settoriale con Γ semipiano di $\mathbb{C}$.

Per Γ definito dalla (5.12) porremo

$$\Gamma_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid \theta' - \varepsilon \leq \operatorname{Arg} z \leq \theta'' + \varepsilon\}, \tag{5.14}$$

essendo ε positivo e tale che $-\pi < \theta' - \varepsilon < \theta'' + \varepsilon < \pi$.

([4]) $\operatorname{Arg} z$ indica l'argomento principale di z e assume valori in $]-\pi, \pi]$.

([5]) Per questa nozione rinviamo al n. 7 di [2].

Teorema 5.2. *Sia fissato un cono convesso $\mathcal{H}$ di $\mathbb{R}^s$ e un generico semigruppo Λ_0 contenuto in $\mathcal{H}$, verificante l'ipotesi α). Consideriamo un generico simbolo $q(x,\xi) \in APS^m(\Lambda_0)$ e supponiamo in più che $\tilde{q}$ sia $\mathcal{H}\Gamma$-settoriale; allora*

I) a) *L'insieme risolvente di $\tilde{q}(D)$ è contenuto in $\mathbb{C} \setminus \tilde{q}(\Lambda_0)$;*

b) *l'Operatore risolvente di $\tilde{q}(D)$ è dato da*

$$(z - \tilde{q}(D))^{-1} f = \sum_{\lambda \in \Lambda_0} \frac{a(\lambda, f)}{z - \tilde{q}(\lambda)} e^{i\lambda \cdot x} \quad \forall f \in B^2_{ap}(\mathbb{R}^s; \Lambda_0); \tag{5.15}$$

c) *la norma di $(z - \tilde{q}(D))^{-1}$ in $\mathcal{B}(B^2_{ap}(\mathbb{R}^s, \Lambda_0))$ si valuta con*

$$|||(z - \tilde{q}(D))^{-1}|||_{\mathcal{B}} \leq \frac{1}{dist\,(z, \Gamma)} \qquad \forall z \in (\mathbb{C} \setminus \Gamma_\varepsilon) \cap B^c_{\delta_1} \tag{5.16}$$

per δ_1 sufficientemente grande.

II) *L'Operatore risolvente di $q(x, D) = \widetilde{\mathfrak{Q}}$ è dato da*

$$(z - q(x, D))^{-1} f = \sum_{k=0}^{\infty} H^{(k)}(z, x, D)(z - \tilde{q}(D))^{-1} f \tag{5.17}$$

essendo $H^{(k)}$ l'iterato k-simo dell'Operatore pseudodifferenziale

$$H(z, x, D) = (z - \tilde{q}(D))^{-1} \circ (q(x, D) - \tilde{q}(D)) \quad \forall z \in (\mathbb{C} \setminus \Gamma_\varepsilon) \cap B^c_{\delta_2} \tag{5.18}$$

con δ_2 fissato in modo che

$$|||(z - \tilde{q}(D))^{-1}|||_{\mathcal{B}} \cdot |||q|||_{0,m} < 1. \tag{5.19}$$

Dimostrazione. a) e b) si stabiliscono osservando che, per z appartenente all'insieme risolvente di $\tilde{q}(D)$, per ogni $f \in B^2_{ap}(\mathbb{R}^s, \Lambda_0)$ esiste $u \in B^2_{ap}(\mathbb{R}^s; \Lambda_0)$ tale che

$$(z - \tilde{q}(D))u = f,$$

da cui si deduce $(z - \tilde{q}(\lambda))a(\lambda, u) = a(\lambda, f) \ldots$

Applicando l'uguaglianza di Parseval si ricava

$$\|(z - \tilde{q}(D))^{-1} f\|^2_{B^2_{ap}} = \sum_{\lambda \in \Lambda_0} \frac{|a(\lambda, f)|^2}{|z - \tilde{q}(\lambda)|^2}$$

da questa si deduce la (5.16), tenendo presente che per $z \in (\mathbb{C} \setminus \Gamma_\varepsilon) \cap B_\delta^c$ e $\lambda \in \Lambda_0$ si ha

$$|z - \tilde{q}(\lambda)| \geq \operatorname{dist}(z, \Gamma)$$

se δ è sufficientemente grande.

Per la seconda parte poniamo

$$q(x, D) = \tilde{q}(D) + q_1(x, D).$$

L'equazione $(z - q(x, D))u = f$ può essere scritta $(z - \tilde{q}(D))u - q_1(x, D)u = f$ e questa è equivalente, per $z \in (\mathbb{C} \setminus \Gamma_\varepsilon) \cap B_{\delta_1}^c$, alla seguente

$$u - (z - \tilde{q}(D))^{-1} \circ q_1(x, D)u = (z - \tilde{q}(D))^{-1} f.$$

Poiché la (5.16) garantisce che esiste δ_2 tale che per $z \in (\mathbb{C} \setminus \Gamma_\varepsilon) \cap B_{\delta_2}^c$ è soddisfatta la (5.19), risulta convergente in norma la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} H^{(k)}(z, x, D).$$

Basta infatti applicare la c) del Teorema 5.8 per $r = 0$ e $m_j = m \ldots$ $\square$

Come applicazione di questo teorema si possono estendere i risultati di [2] relativi agli Operatori differenziali lineari aventi i coefficienti costanti al caso in cui i coefficienti siano quasi periodici. Ma a tale argomento dedicheremo un altro lavoro.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Avantaggiati, *Spazi di ultradistribuzioni e Problema di Cauchy per certi sistemi di equazioni Pseudodifferenziali,* Conf. Sem. Mat. Univ. di Bari, 193 (1984).

[2] A. Avantaggiati, *Teoria debole delle funzioni quasi periodiche,* Ric. di Mat., 45 (1996).

[3] A. Avantaggiati - G. Bruno - R. Iannacci, *Decomposizione canonica degli spazi di funzioni quasi periodiche su sottogruppi di $\mathbb{R}^s(+)$ finitamente generati,* in preparazione.

[4] G. Bruno, *The convolution in B^q_{ap} spaces,* Rend. di Mat., (7) 15 (1995), pp. 293-309.

[5] G. Bruno - R. Grande, *Compact Embedding Theorems for Sobolev-Besicovitch Spaces of Almost Periodic Functions,* Rend. Acc. Naz. delle Sc. dei XL, Mem. di Mat. e Applicazioni, (5) 20 (1996), pp. 157-173.

[6] L.A. Coburn - R.D. Moyer - I. M. Singer, *C^*-algebras of almost periodic pseudodifferential operators,* Acta Math., 130 (1973), pp. 279-307.

[7] I.M. Gel'fand - G. E. Shilov, *Generalized Functions,* Acad. Press. Inc., vol. 2, London, 1968.

[8] L. Hormander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators, II, III,* Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[9] R. Iannacci - A. Bersani - G. Dell'Acqua - P.Santucci, *Embedding Theorems for Sobolev-Besicovitch spaces of almost periodic functions,* pre-print Dip. Me. Mo. Mat., La Sapienza, Roma, 1966.

[10] A.A. Pankov, *Bounded and Almost Periodic Solutions of Nonlinear Operators Differential Equations,* Kluwer Acad. Publ., 1990.

[11] A. Pietsch, *Nuclear Locally Convex Spaces,* Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[12] M.A. Shubin, *Differential and Pseudo-differential Operators in Spaces of Almost Periodic Functions,* Math. USSR Sbornik, 24-4 (1974), pp. 547-573.

[13] M.A. Shubin, *Almost Periodic Functions and Partial Differential Operators,* Russian Math. Surv., 33-2 (1978), pp. 1-52.

[14] M.A. Shubin, *Pseudo-differential Operators and Spectral Theory,* Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[15] M.A. Shubin, *The spectral theory and the index of elliptic operators with almost periodic coefficients,* Russian Math. Surv., 34-2 (1979), pp. 109-157.

[16] M.A. Shubin, *Partial Differential Equations VII,* Enciclopedia of Math. Sc., vol. 64, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici
per le Scienze Applicate,
Università degli Studi di Roma "La Sapienza",
Via Antonio Scarpa 16,
00161 Roma (ITALY)